

УДК 532.517.3

А.Г. Потапов

К вопросу о ламинарно-турбулентном переходе при течении вязких и вязкопластичных жидкостей в круглой трубе

Среди разнообразных турбулентных течений в природе и технике особое внимание привлекают течения в круглой трубе, являющиеся наиболее распространенными. Геометрия этих течений проста и легко воспроизводима, исследования проводятся с жидкостями с различными реологическими характеристиками – вязкими, вязкопластичными, вязкоупругими и др.

Несмотря на многолетние систематические экспериментальные и теоретические исследования, причина нарушения ламинарного режима течения жидкости в круглых трубах и возникновения турбулентности остается неясной. Существует известное решение Пуазейля, которое связывает расход с градиентом давления. Формально ламинарное течение Пуазейля существует для любых расходов, но реально при расходах больше некоторого критического ($Q \geq Q_{кр}$) оно теряет устойчивость.

Экспериментально для вязких (ньютоновских) жидкостей было установлено, что

существует критическое число Рейнольдса $\left(Re = \frac{V\rho D}{\mu} \right)$ в пределах 1800–2320 [1, 2].

Такой разброс предположительно объясняется тем, что исследования проводились в различных условиях, а также существованием верхнего и нижнего критических чисел Рейнольдса. Под верхним критическим числом подразумевается такое значение Re , выше которого установившееся течение может быть только турбулентным; под нижним критическим числом – такое значение Re , ниже которого установившееся течение может быть только ламинарным независимо от величины возмущений, вводимых в поток [3]. Таким образом, существует область ламинарного течения, где при вводе в поток возмущений возникает неустойчивость ламинарного профиля скорости, которая, однако, не приводит к возникновению установившегося турбулентного движения в трубе, и ламинарное течение восстанавливается. В настоящее время границы этой области, а также причины ламинарно-турбулентного перехода не определены.

В экспериментах возникновение ламинарно-турбулентного перехода определялось как по изменению формы профиля скорости в трубе, так и по отклонению коэффициента гидравлического сопротивления от расчетного значения, вычисленного по формуле Гагена–Пуазейля. Следует отметить, что результаты исследований обоими методами в целом адекватны друг другу [2].

Эксперименты также показали, что при неустойчивости ламинарного течения не обязательно возникает установившееся турбулентное течение. При значениях Re менее 2000 вдали от входа, где устанавливалось ламинарное течение, в поток вводился стержень, при обтекании которого формировался профиль скорости, характерный для турбулентного движения, что свидетельствовало о неустойчивости ламинарного течения к возмущениям, не приводящей, однако, к возникновению установившегося турбулентного течения, поскольку при увеличении расстояния от стержня в потоке вновь восстанавливается ламинарный профиль скорости [3].

В последнее время предпринимаются попытки исследования перехода к турбулентности в круглой трубе с помощью прямого численного моделирования. Расчеты установившегося течения в круглой трубе показали, что отношение скорости потока на оси к среднерасходной скорости стремится к характерному для установившегося

Ключевые слова:

ламинарно-турбулентный переход, вязкая и вязкопластичная жидкости, коэффициент гидравлических сопротивлений, параметр Хедстрема.

Keywords:

laminar to turbulent transition, viscous and viscoplastic liquids, hydraulic resistance coefficient, Hedstrom's parameter.

ламинарного течения, при стремлении Re к значению, равному 1000. При этом числе Рейнольдса коэффициенты сопротивления, вычисленные по формуле для ламинарного и турбулентного течений, совпадают [1].

На основании математического эксперимента Н.Н. Моисеевым сформулирована гипотеза: «Уравнение движения вязкой жидкости, по-видимому, допускает целый спектр возможных почти периодических решений, и им при известных условиях соответствует целая система возможных установившихся течений жидкости. Одно из них – ламинарное течение Пуазейля. Остальные – это некоторые базовые турбулентные течения. Они порождаются вполне определенными множествами начальных состояний. Все остальные течения, порождаемые другими начальными состояниями, с течением времени к ним стремятся». Другими словами, «... при данном расходе $Q > Q_1$ существует много форм стационарных турбулентных течений, практически не отличимых по своим интегральным характеристикам» [4].

Приняв эту гипотезу в качестве рабочей, для стационарных течений различных сред запишем уравнение Дарси–Вейсбаха в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} dP_{ij} = \lambda_{ij} \frac{V_j^2}{2D} dx, \quad (1)$$

где P – давление; λ – коэффициент гидравлического сопротивления; ρ – плотность жидкости; V – среднерасходная скорость потока; D – диаметр трубы; i – индекс течения, при $i = 1$ – ламинарное течение Пуазейля, при $i = 2, \dots$ – стационарные базовые турбулентные течения; j – индекс скорости потока.

И.Р. Пригожин в работе [5] отмечает: «Изменение энтропии со временем всегда можно разделить на вклады двух типов: «поток энтропии», зависящий от обмена системы с окружающей средой, и «производство энтропии», обусловленное необратимыми процессами внутри системы. Второе начало термодинамики требует, чтобы производство энтропии было положительным или обращалось в нуль при достижении системой равновесия. На поток энтропии второе начало не налагает никаких условий. Таким образом, в стационарном состоянии положительное производство энтропии компенсируется отрицательным потоком энтропии: активность, производящая энтропию, постоянно поддерживается за счет обме-

на с окружающей средой. Состояние равновесия соответствует частному случаю, когда и поток энтропии, и производство энтропии обращаются в нуль».

Для простой системы объединенное уравнение первого и второго законов термодинамики формулируется следующим образом [6, 7]:

$$d\Phi \leq -SdT + \frac{1}{\rho} dP, \quad (2)$$

где Φ – изобарно-изотермический потенциал; S – энтропия системы; T – температура.

С приближением к состоянию равновесия изобарно-изотермический потенциал системы убывает, достигая минимума в состоянии равновесия, когда $d\Phi = 0$, при этом оба члена в правой части уравнения (2) равны нулю, поскольку при равновесии $T = const$ и $P = const$.

Опираясь на определение состояния равновесия как частного случая стационарного [5], можно предположить, что стационарное состояние наступает тогда, когда $d\Phi = 0$, но $T \neq const$ и $P \neq const$. В этом случае из уравнения (2) получим соотношение

$$\frac{1}{\rho} dP = SdT. \quad (3)$$

Анализируя совместно уравнения (1) и (3), используя индексацию, принятую для уравнения (1), можно записать:

$$S_{ij} dT \approx \lambda_{ij} \frac{V_j^2}{2D} dx. \quad (4)$$

Используя уравнение (4), можно получить соотношения:

- для $V_1 = V_2$:

$$\frac{S_{21}}{S_{11}} \approx \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}}; \quad (5)$$

- $\lambda_{11} = \lambda_{22}$:

$$\frac{V_2}{V_1} \approx \sqrt{\frac{S_{22}}{S_{11}}}, \quad (6)$$

где λ_{11} и S_{11} – коэффициент гидравлического сопротивления и энтропия ламинарного потока; λ_{21} и S_{21} – коэффициент гидравлического сопротивления и энтропия турбулентного потока при скорости течения V_1 ; λ_{22} и S_{22} – коэффициент гидравлического сопротивления и энтропия турбулентного потока при скорости течения V_2 .

Рассмотрим узловые моменты, установленные экспериментально и полученные в расчетах. В работе [1] по результатам расчетов сле-

лан вывод, что при $Re < 1000$ при любых характеристиках пульсационного движения на входе вдали от начала устанавливается ламинарное течение. В работе [3] на основании экспериментальных исследований сделано предположение, что при $Re > 1000$ ламинарный профиль неустойчив. При $Re \approx 1000$ коэффициенты сопротивлений, вычисленные по формулам для ламинарного и турбулентного течений, между собой равны.

Таким образом, при $Re \approx 1000$ из соотношений (5) и (6) получаем $S_{11} \approx S_{21} \approx S_{22}$. При $Re > 1000$ (с увеличением расхода жидкости)

растут отношения $\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} > 1$ и $\frac{V_2}{V_1} > 1$, т.е. растет отношение энтропий турбулентного и ламинарного течений.

Рассмотрим ситуацию, когда с ростом расхода жидкости наступает ламинарно-турбулентный переход, приняв в первом приближении $Re_{кр}$ как $Re_1 = 2060$ (как среднее значение для интервала 1800–2320). Для оценки численного значения соотношений (5) и (6) рассчитаем коэффициенты сопротивлений по формулам:

- для ламинарного потока (при $Re_1 = 2060$, $\lambda_{11} = 0,031068$):

$$\lambda_{11} = \frac{64}{Re_1}; \tag{7}$$

- турбулентного потока [8] (при $Re_1 = 2060$, $\lambda_{21} = 0,04949$):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,08 \lg Re \sqrt{\lambda} - 1,04. \tag{8}$$

Таким образом, обозначив отношение

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = n_\lambda, \text{ получаем } n_\lambda = 1,593.$$

Для определения значения Re_2 , подставив в формулу (8) значение $\lambda_{11} = 0,031068$, получим

$$Re_2 = 9582. \text{ Обозначив отношение } \frac{Re_2}{Re_1} = n_{Re}, \text{ вычислим } n_{Re} = 4,6513.$$

Используя значения n_λ и n_{Re} для определения Re_1 можно записать две равноправных формулы:

$$\sqrt{Re_1} = 8,32 \lg 6,4 n_{Re}^2 Re_1; \tag{9}$$

$$\sqrt{Re_1} = 8,32 \sqrt{n_\lambda} \lg 6,4 n_\lambda Re_1. \tag{10}$$

Среди разнообразных жидкостей, встречающихся в природе и технике, закономерности течения которых в круглой трубе привлекают внимание исследователей, большую группу составляют жидкости, ламинарное течение которых достаточно полно описывается теоретическими зависимостями, полученными на основе вязкопластичной модели Шведова–Бингама [9]. Однако закономерности турбулентного течения и ламинарно-турбулентного перехода при тчении вязкопластичных жидкостей изучены недостаточно. Экспериментальные данные о нарушении ламинарного течения вязкопластичных жидкостей, полученные различными исследователями, показывают, что $Re_{кр}$ для вязкопластичных

сред ($Re = \frac{V\rho D}{\eta}$) зависит от безразмерного параметра Хедстрема ($He = \frac{\tau_0 \rho D^2}{\eta^2}$), где τ_0 – динамическое напряжение сдвига, η – пластическая вязкость [9].

Коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном тчении вязкопластичных жидкостей в круглой трубе рассчитывается по формуле Букингама (обобщенное уравнение Гагена–Пуазейля) [9]:

$$\lambda = \frac{64}{Re \varphi(\alpha)}, \tag{11}$$

$$\text{где } \varphi(\alpha) = 1 - \frac{4}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha^4; \alpha = \frac{8He}{\lambda Re^2}.$$

Расчеты коэффициента гидравлических сопротивлений λ по формуле (11) производят с учетом соотношения

$$\frac{8Re}{He} = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}. \tag{12}$$

Для получения уравнений, аналогичных (9) и (10), необходимо иметь аналитическую зависимость коэффициента гидравлических сопротивлений при турбулентном тчении вязкопластичных жидкостей в трубе.

Используя понятие турбулентной вязкости для вязкопластичных систем, уравнение движения в пограничном слое можно записать следующим образом:

$$\tau = \tau_0 + (\eta + \eta_m) \frac{dV}{dy}, \tag{13}$$

где η_m – турбулентная вязкость.

В работе [8] отмечено, что расчеты безразмерной скорости для вязких сред в зависимости от безразмерного расстояния от стенки показали «практическую эквивалентность» формул для распределения скорости в пограничном слое и трубе, что «... позволяет использовать для вычисления распределения скорости в трубе более простую формулу, полученную для распределения скорости в пограничном слое...».

Выражая коэффициент турбулентной вязкости через путь смешения и решая уравнение (13) при граничных условиях на стенке и на границе вязкопластичного подслоя для коэффициента гидравлического сопротивления при больших значениях числа Рейнольдса ($Re > 2100$), получим [10]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left(1 - \frac{8He}{\lambda Re^2}\right) [2,08 \lg Re \sqrt{\lambda} - 3,8 + 0,324\delta], \quad (14)$$

где δ – безразмерная толщина вязкопластичного подслоя, определяемая по формуле

$$\delta = \frac{V_* \delta_0 \rho}{\eta},$$

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \text{ – динамическая скорость; } \delta_0 \text{ – толщина ламинарного подслоя.}$$

Значение величины δ определим из условия на границе вязкопластичного подслоя

$$\frac{V_z}{V_*} = \left(1 - \frac{8He}{\sqrt{\lambda} Re^2}\right) \delta, \quad (15)$$

где V_z – скорость на границе подслоя.

Приняв по аналогии с закономерностями турбулентного течения ньютоновских жидкостей $\frac{V_z}{V_*} = 7,8$ [8], получим $\delta = \frac{7,8}{\left(1 - \frac{8He}{\sqrt{\lambda} Re^2}\right)}$. Откуда следует, что при турбу-

лентном течении вязкопластичных сред с ростом параметра пластичности (критерия Ильюшина) увеличивается толщина ламинарного подслоя.

При этом значении безразмерной толщины вязкопластичного подслоя уравнение (14) для определения коэффициента гидравлического сопротивления примет окончательный вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left(1 - \frac{8He}{\lambda Re^2}\right) [2,08 \lg Re \sqrt{\lambda} - 1,04] + 2,76 \frac{8He}{\lambda Re^2}. \quad (16)$$

Решая совместно уравнения (11) и (16) и используя значения n_λ и n_{Re} для определения $Re_{кр}$ при турбулентном течении вязкопластичных сред, получим:

$$\sqrt{Re_{кр}} = \frac{8,32}{\sqrt{\varphi(\alpha_{кр})}} \left(1 - \frac{\alpha_{кр}}{n_{Re}^2}\right) \lg \frac{6,4n_{Re}^2}{\varphi(\alpha_{кр})} Re_{кр} + \frac{22,08\alpha_{кр}}{n_{Re}^2 \sqrt{\varphi(\alpha_{кр})}}; \quad (17)$$

$$\sqrt{Re_{кр}} = \frac{8,32\sqrt{n_\lambda}}{\sqrt{\varphi(\alpha_{кр})}} \left(1 - \frac{\alpha_{кр}}{n_\lambda}\right) \lg \frac{6,4n_\lambda}{\varphi(\alpha_{кр})} Re_{кр} + \frac{22,08\alpha_{кр}}{\sqrt{n_\lambda} \varphi(\alpha_{кр})}. \quad (18)$$

При $He = 0$, $\alpha = 0$ и $\varphi(\alpha) = 0$ уравнения (17) и (18) идентичны (9) и (10).

Для проверки соответствия полученных уравнений (17) и (18) фактическим значениям $Re_{кр}$ при различных значениях He были привлечены результаты экспериментальных исследований течения глинистых суспензий без обработки полимерными реагентами, опубликованные в работах [11–15]. Массив данных объединил 74 экспериментальных результата, диапазон изменения значений составил: $3,58 \cdot 10^3 \leq He \leq 1,36 \cdot 10^7$; $2,15 \cdot 10^3 \leq Re \leq 9,9 \cdot 10^4$.

Расчеты $Re_{кр}$ по уравнению (17) при $n_{Re} = 4,6513$ показали, что относительное среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от расчетов $\sigma = 9,77\%$; по уравнению (18) при $n_\lambda = 1,593$ $\sigma = 18,9\%$; по эмпирической формуле Е.М. Соловьева $\sigma = 11,79\%$.

На рис. 1 представлены зависимости $Re_{кр} = f(He)$, рассчитанные по уравнениям (17) и (18), а также зависимость Хэнкса [16], и нанесены экспериментальные данные [11, 12, 14, 17].

На рис. 2 представлена серия кривых зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от Re и He . Область ламинарного течения (кривые 3) была рассчитана по формулам (11) и (12); предельная кривая ламинарного течения вязкопластичных жидкостей (кривая 2) – по уравнению (17); область турбулентного течения (кривые 4) – по формуле (16).

Анализ представленных результатов показывает, что для каждого значения He в окрестности $Re_{кр}$ существует область, в которой

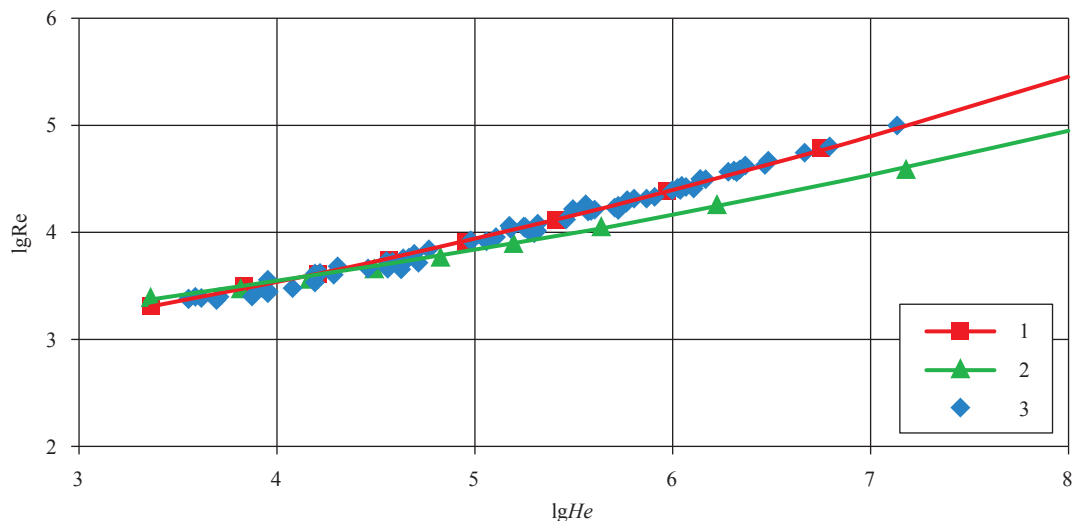


Рис. 1. Зависимость критического значения числа Рейнольдса от параметра Хедстрема:
 1 – расчет по уравнению (17); 2 – расчет по уравнениям Хэнкса [16];
 3 – экспериментальные данные [11, 12, 14, 17]

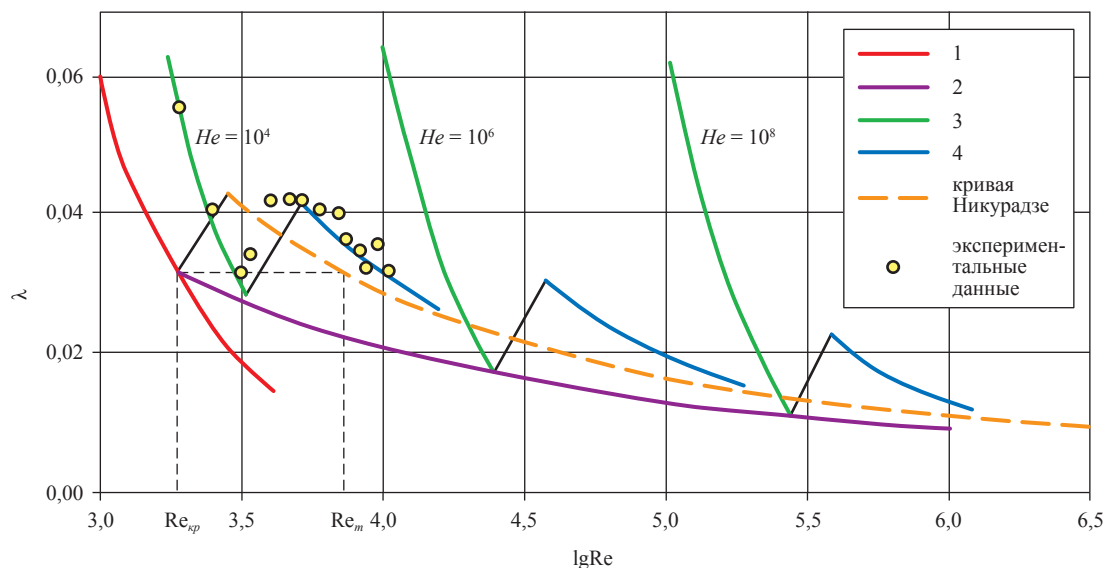


Рис. 2. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса и параметра Хедстрема:
 1 – вязкая жидкость; 2 – предельная кривая ламинарного течения вязкопластичных жидкостей; 3 – вязкопластичная жидкость (экспериментальные данные при $He = 10^4$ В.Г. Литвишко [17]); 4 – турбулентное течение вязкопластичных жидкостей

коэффициент гидравлического сопротивления ниже, чем для вязкой жидкости, при том же значении Re . Следует отметить, что возможность затягивания ламинарно-турбулентного перехода на продольно обтекаемой плоской пластине в потоке вязкой несжимаемой жидкости с помощью создания и подбора оптимального распределения объемных сил отмечалась в работе [18], где «показано, что надлежащим подбором объемных сил удастся не только обеспечить полностью ламинарный режим течения в пограничном слое, но и уменьшить полное сопротивление обтекаемого тела». Вероятно, эффект при течении вязкопластичных жидкостей также обусловлен объемными силами, связанными с пластичностью текущей среды.

Таким образом, между ламинарно-турбулентным переходом при течении вязких и вязкопластичных жидкостей в круглых трубах существует глубокая аналогия.

Возникает вопрос, почему реализуется то или иное течение, нарушается один стационарный процесс и происходит переход на другой стационарный процесс.

Рассмотрим процесс течения жидкости в трубе при последовательном увеличении расхода жидкости. При расходах $Q < Q_1$ реализуется ламинарное течение Пуазейля, в котором, по определению И.Р. Пригожина, положительное производство энтропии компенсируется отрицательным потоком энтропии, зависящим от обмена системы с окружающей средой [4]. Можно предположить, что при расходах $Q > Q_1$

в ламинарном потоке не обеспечивается равенство между производством энтропии и ее потоком из-за недостаточной эффективности обмена системы с окружающей средой, в связи с чем изменяется структура потока, и она становится более развитой, с более эффективными показателями обмена как внутри потока, так и с окружающей средой, и устанавливается новое стационарное течение, которое является турбулентным.

В заключение подведем итоги данной работы. Показано, что ламинарно-турбулентный переход при течении вязких и вязкопластичных жидкостей происходит, когда при равенстве коэффициентов гидравлических сопротивлений при турбулентном и ламинарном течениях отношение чисел Рейнольдса для этих режимов в первом приближении составляет $n_{re} = 4,6513$. Следует заметить, что полученная величина практически совпадает со значением первой универсальной постоянной Фейгенбаума, равной 4,6692.

Сформулирована гипотеза. Ламинарно-турбулентный переход обусловлен нарушением в ламинарном потоке баланса между производством энтропии и ее потоком из-за недостаточной эффективности обмена системы с окружающей средой, вследствие чего нарушается ламинарный режим течения, структура потока становится более развитой с другими показателями производства и потока энтропии, при которых восстанавливается баланс и устанавливается новое стационарное турбулентное течение.

Список литературы

1. Павельев А.А. Переход к турбулентности на начальном участке круглой трубы / А.А. Павельев, А.И. Решмин // Изв. РАН. – 2001. – № 4. – С. 113–121.
2. Павельев А.А. Влияние структуры начальных возмущений на режим установившегося течения в трубе / А.А. Павельев, А.И. Решмин, В.В. Трифонов // Изв. РАН. – 2006. – № 6. – С. 68–76.
3. Павельев А.А. О нижнем критическом числе Рейнольдса для течения в круглой трубе / А.А. Павельев, А.И. Решмин, С.Х. Тепловодский и др. // Изв. РАН. – 2003. – № 4. – С. 47–55.
4. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1979. – 223 с.
5. Пригожин И.Р. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени / И.Р. Пригожин, И. Стенгерс. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 240 с.
6. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, В.М. Лившиц. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
7. Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики / В.В. Сычев. – М.: Наука, 1981. – 195 с.
8. Миллионщиков М.Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах / М.Д. Миллионщиков. – М.: Наука, 1969. – 50 с.
9. Маковой Н. Гидравлика бурения / Н. Маковой. – М.: Недра, 1986. – 536 с.

10. Потапов А.Г. Сопротивление при турбулентном течении буровых растворов / А.Г. Потапов // Бурение глубоких разведочных скважин в осложненных условиях Нижнего Поволжья. – М.: ИГИРГИ, 1976. – Вып. 27. – С. 27–31.
11. Ильин Г.А. Определение критической скорости течения промывочных и цементных растворов / Г.А. Ильин // Газовая промышленность, 1971. – № 1. – С. 5–7.
12. Повх И.Л. Возникновение и развитие турбулентности при движении дисперсной системы в круглой трубе / И.Л. Повх, Н.И. Болонов, А.Е. Эйдельман // Инженерно-физический журнал. – 1974. – Т. XXVI, № 5. – С. 901–907.
13. Филатов Б.С. Течение суспензий глины в трубах / Б.С. Филатов // Коллоидный журнал. – 1954. – Т. XVI, № 1. – С. 65–71.
14. Латыпов Э.К. Уточнение расчета потерь давления при течении вязкопластичных жидкостей в трубах / Э.К. Латыпов, Б.С. Филатов // Нефтяное хозяйство. – 1962. – № 3. – С. 23–30.
15. Hedstrom O.A. Flow of plastics materials in pipens / O.A. Hedstrom // Ind. Eng. Chem. – 1952. – № 44. – P. 651.
16. Hanks R.W. The laminar-turbulent transition for fluids with a yields stress / R.W. Hanks // AIChE Journal. – 06/2004. – № 9 (3). – P. 306–309.
17. Потапов А.Г. Методика определения снижения гидравлического сопротивления при течении вязкопластичных жидкостей / А.Г. Потапов, В.Г. Литвишко // Бурение глубоких разведочных скважин в осложненных условиях Нижнего Поволжья. – М.: ИГИРГИ, 1976. – Вып. 27. – С. 32–36.
18. Казаков А.В. О возможности затягивания ламинарно-турбулентного перехода при больших числах Рейнольдса с помощью оптимального выбора объемных сил / А.В. Казаков // Изв. РАН. – 2002. – № 4. – С. 81–86.
19. Никитин Н.В. Численное исследование ламинарно-турбулентного перехода в круглой трубе под действием периодических входных возмущений / Н.В. Никитин // Изв. РАН. – 2001. – № 2. – С. 42–55.